



# Grundpraktikum II

## O3/O4 - Prismen und -Gitterspektrometer

Julien Kluge

10. März 2016

**Student:** Julien Kluge [REDACTED]  
julien@physik.hu-berlin.de

**Partner:** [REDACTED]  
[REDACTED]

**Betreuer:** Dr. S. Sadofiev

**Raum:** 211

**Messplatz:** 1

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung/Fehlerberechnung</b>	<b>2</b>
3.1	Bestimmung des Brechungsindex und Dispersionskurve . . . . .	2
3.2	Dispersionskurve und Auflösungsvermögen . . . . .	3
3.3	Gitter und Gitterparameter . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Fehler-/Ergebniseinschätzung</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Anlagen</b>	<b>8</b>
5.1	Messwerte . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>9</b>

## 1 Abstract

In diesem Versuch wurde die Brechung an einem Prisma und die Beugung an einem Gitter mit charakteristischen Spektrallinien zweier Dampfampfen untersucht. Dabei wurden mitunter folgende Ergebnisse erreicht:

- Auflösungsvermögen des Prisma  $\lambda/\Delta\lambda = (2570 \pm 17)$
- Gitterparameter  $g = (9.90 \pm 0.04)\mu\text{m}$
- effektive Spaltanzahl  $N = (1515 \pm 6)$

## 2 Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau bestand aus einer Lampe (Quecksilber oder Natriumdampfampe), einen Strahlengang, ein Drehtisch und ein Fernrohr welches Drehbar um den Tisch gelagert war.

Als erstes wurde das Fernrohr durch Drehen am Okular justiert. Im folgenden wurde der Nullgang der ungebrochenen/ungebeugten Strahlen vermessen. Dieser lag bei circa  $(14.350 \pm 0.017)^\circ$  welcher aber im folgenden nicht mehr weiter benutzt wurde.

Auch wenn von einem gleichseitigen Prisma ausgegangen werden konnte  $\gamma = 60^\circ$ , wurde dieser Winkel noch vermessen. Dabei wurde  $\gamma = |\phi_1 - \phi_2| \cdot \frac{1}{2} = (60.433 \pm 0.011)^\circ$  berechnet welche in den folgenden Rechnungen auch verwendet wurde.

Für den eigentlichen Versuch mit dem Prisma wurde es so positioniert, dass der Umkehrpunkt der Brechungen mit dem Fernrohr vermessen werden konnte. Im folgenden wurde das Prisma durch ein optisches Spaltgitter ersetzt, so dass die Beugungsordnungen gemessen werden konnten. Anschließend wurde der Prozess mit einer anderen Lampe wiederholt.

## 3 Auswertung/Fehlerberechnung

### 3.1 Bestimmung des Brechungsindex und Dispersionskurve

Als erste Versuchsreihe wurde das Prisma so auf den Drehtisch positioniert, dass die Brechung am Umkehrpunkt von einer Seite im Drehen gemessen wurde. Dabei wurden einzelne Spektrallinien des Quecksilberspektrums gewählt. Anschließend wurde von der anderen Seite die gleiche Messung mit den jeweils gleichen Spektrallinien vorgenommen. Diese beiden relativen Winkel  $\delta_R, \delta_L$ , haben den minimalen Ablenkwinkel unter folgender Relation eingeschlossen

$$\delta_{min} = \frac{|\delta_R - \delta_L|}{2} \quad (1)$$

Führt man das nun über gewählte Spektrallinien mit bekannter Wellenlänge aus, erhält man die minimalen Ablenkwinkel welche nach folgender Relation zur Berechnung der Wellenlängenabhängigen Brechzahl führen

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min} + \gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \text{Fehlerfortpflanzung fehlt} \quad (2)$$

Exemplarisch über die gegebenen Wellenlängen folgt:

Lampe	Farbe	Wellenlänge	Brechungsindex
Hg	Violett	404.656nm	$1.64406 \pm 0.00021$
Hg	Blau	435.833nm	$1.63590 \pm 0.00021$
Hg	Blau/Grün	491.607nm	$1.62541 \pm 0.00021$
Hg	Grün	546.074nm	$1.61798 \pm 0.00020$
Hg	Rot	623.440nm	$1.61521 \pm 0.00020$
Na	Gelb	<i>n.A.</i>	$1.61403 \pm 0.00020$

In der Optik wird, zur Charakterisierung von Dispersionskurven häufig die Sellmeier-Gleichung verwendet.

$$n(\lambda) = \sqrt{A + \sum_{i=1}^n \frac{B_i \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}} \quad (3)$$

Mit  $n = 1$  und  $A = 1$  erhalten wir eine Gleichung, nach der gefittet werden kann

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{B \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C}} \quad (4)$$

Führt man diese Regression mit den oben gezeigten Werten aus, erhält man eine Dispersionkurve. Dabei wurde der Datenpunkt für die rote Farbe ausgelassen, da dieser scheinbar falsch gemessen wurde und auch jenseits der erwarteten Varianz ist.

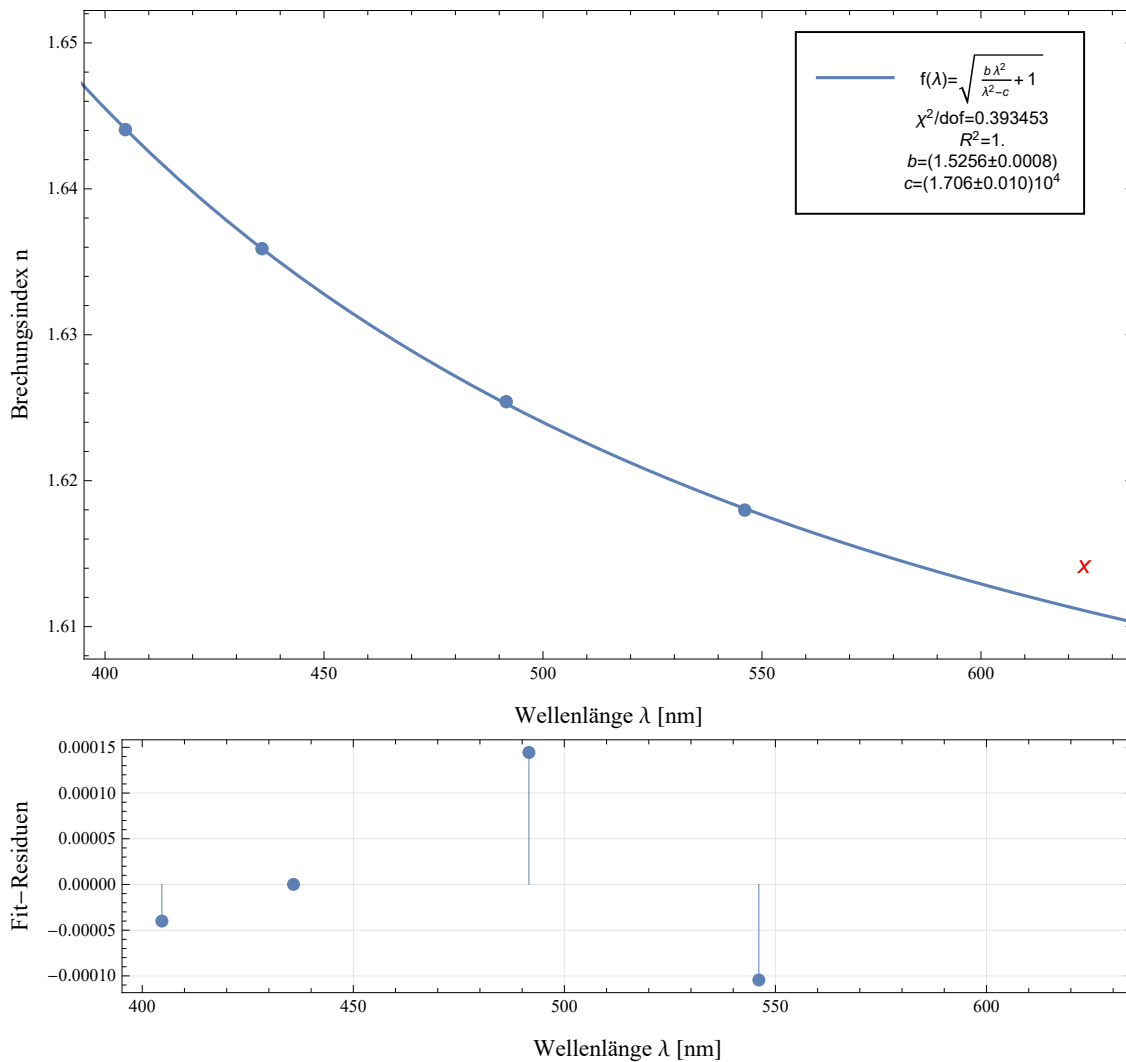


Abbildung 1: entstehende Dispersionkurve  $n(\lambda)$  nach Gleichung 4 und extra gezeichnetes Kreuz für den Datenpunkt der roten Hg-Linie

### 3.2 Dispersionkurve und Auflösungsvermögen

Stellt man die Dispersionkurve nun nach der positiven quadratischen Lösung von  $\lambda$  um, erhält man eine Gleichung mithilfe der Wellenlänge aus der Brechzahl interpoliert werden kann.

$$\lambda(n) = \sqrt{\frac{C(1 - n^2)}{1 + B - n^2}} \quad (5)$$

Setzt man nun die für die Gelbe Natriumlinie bestimmte Brechzahl ein, erhält man dessen Wellenlänge (mittlere Dublett-Wellenlänge)

$$\overline{\lambda_{Na,d2}} = (587 \pm 4)\text{nm} \quad (6)$$

Dabei gehen die beiden Fitparameter zu circa 70% in die Fehlerfortpflanzung ein. Die restlichen 30% fallen auf die Unsicherheit des Brechungsindizes.

Durch Multiplikation mit der negativen Prismenbreite  $-b$  und Differenziation nach  $\lambda$  ergibt sich ein Ausdruck für das Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = -b \frac{dn}{d\lambda} \quad (7)$$

$$= b \frac{B \cdot C \cdot \lambda}{(c - \lambda^2)^2 \cdot \sqrt{1 + B + \frac{B \cdot C}{\lambda^2 - C}}} \quad (8)$$

Für die Wellenlänge von 590nm (nahe den Natrium-Dublett-Linien) und einer Prismenbreite von circa 29.6mm ergibt sich das Auflösungsvermögen zu

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = (2570 \pm 17) \quad (9)$$

### 3.3 Gitter und Gitterparameter

Für die Beugung der Strahlen am Spaltgitter mit Gitterparameter  $g$  gilt der folgende Zusammenhang

$$\sin \alpha(k) = \frac{\lambda}{g} \cdot k \quad (10)$$

Fasst man nun den Bruch auf der rechten Seite zu  $a$  zusammen, besitzt man eine Gleichung, nach der eine Regression über die Daten  $\sin \alpha(k)$  ausgeführt werden kann um mithilfe der bekannten Wellenlänge  $\lambda$  den Gitterparameter zu bestimmen.

Für den Fitparameter  $a$  folgt damit sofort

$$g = \frac{\lambda}{a} \quad (11)$$

Führt man die Regression wie in Abbildung 2 gezeigt aus und berechnet den Gitterparameter nach Gleichung 11 erhält man

$$g = (9.90 \pm 0.04)\mu\text{m} \quad (12)$$

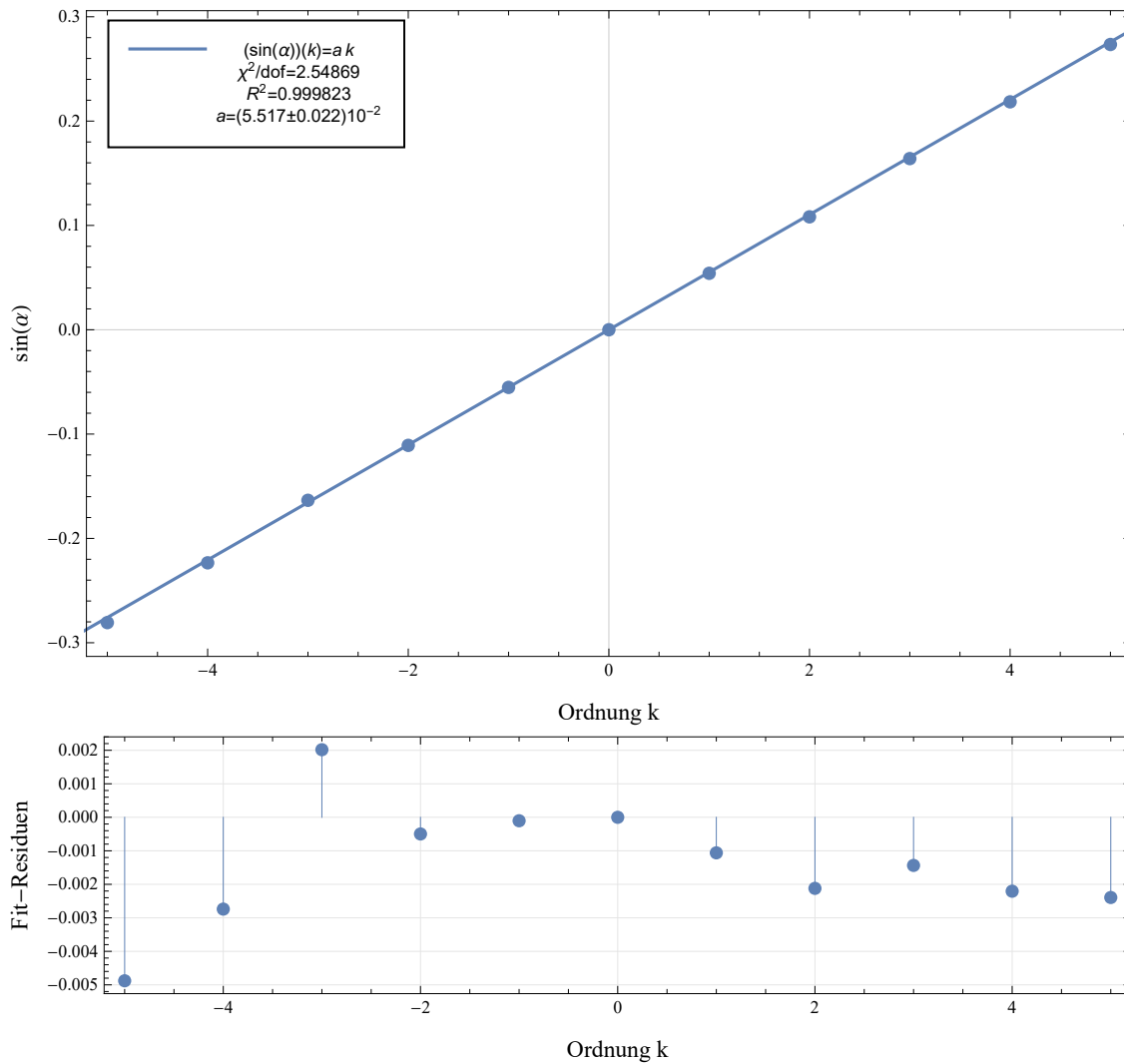


Abbildung 2: lineare Regression nach Gleichung 10

Mithilfe des Gitterparameters und dem Wissen über die bestrahlte Breite des Gitters ( $b_g = 15\text{mm}$ ) kann man leicht berechnen, wie viele Spalte zur Beugung beitragen

$$N = \frac{b_g}{g} \quad (13)$$

Man errechnet schnell

$$N = (1515 \pm 6) \quad (14)$$

Mit der Anzahl der beitragenden Gitterspalten lässt sich ebenfalls leicht das Auflösungsvermögen einer jeden Ordnung beschreiben mit

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k \cdot N \quad (15)$$

Exemplarisch für die ersten 5 Ordnungen

$k$	$\lambda/\Delta\lambda$	$\Delta\lambda$ bei $(587 \pm 4)\text{nm}$
1	$1515 \pm 6$	$0.387 \pm 0.003\text{nm}$
2	$3031 \pm 12$	$0.1937 \pm 0.0015\text{nm}$
3	$4546 \pm 18$	$0.1291 \pm 0.0010\text{nm}$
4	$6061 \pm 24$	$0.0968 \pm 0.0008\text{nm}$
5	$7577 \pm 30$	$0.0775 \pm 0.0006\text{nm}$

Interessanterweise decken sich diese Ergebnisse nicht mit den Beobachtungen. Die Natriumdublett-Linien sind nach Literatur<sup>1</sup> circa  $0.5974\text{nm}$  voneinander entfernt. Das Auflösungsvermögen diktiert bereits in der ersten Ordnung eine Auflösbarkeit der beiden Linien. In der Praxis aber waren erst ab der vierten Ordnung zwei getrennte Linien wahrzunehmen und erst in der fünften Ordnung wurde dies deutlich. Das entspricht einen lediglich 16% Wert des theoretisch berechneten und darf daher kritisch betrachtet werden.

Führt man für die Gleichung 10 noch weitere Spektrallinien des Gitters an, erhält man die Möglichkeit unter Kenntnis des Gitterparameters die Wellenlänge von gewählten Linien zu berechnen. Unter Anwendung der Regression, wie bereits bekannt erhält man die folgende Abbildung

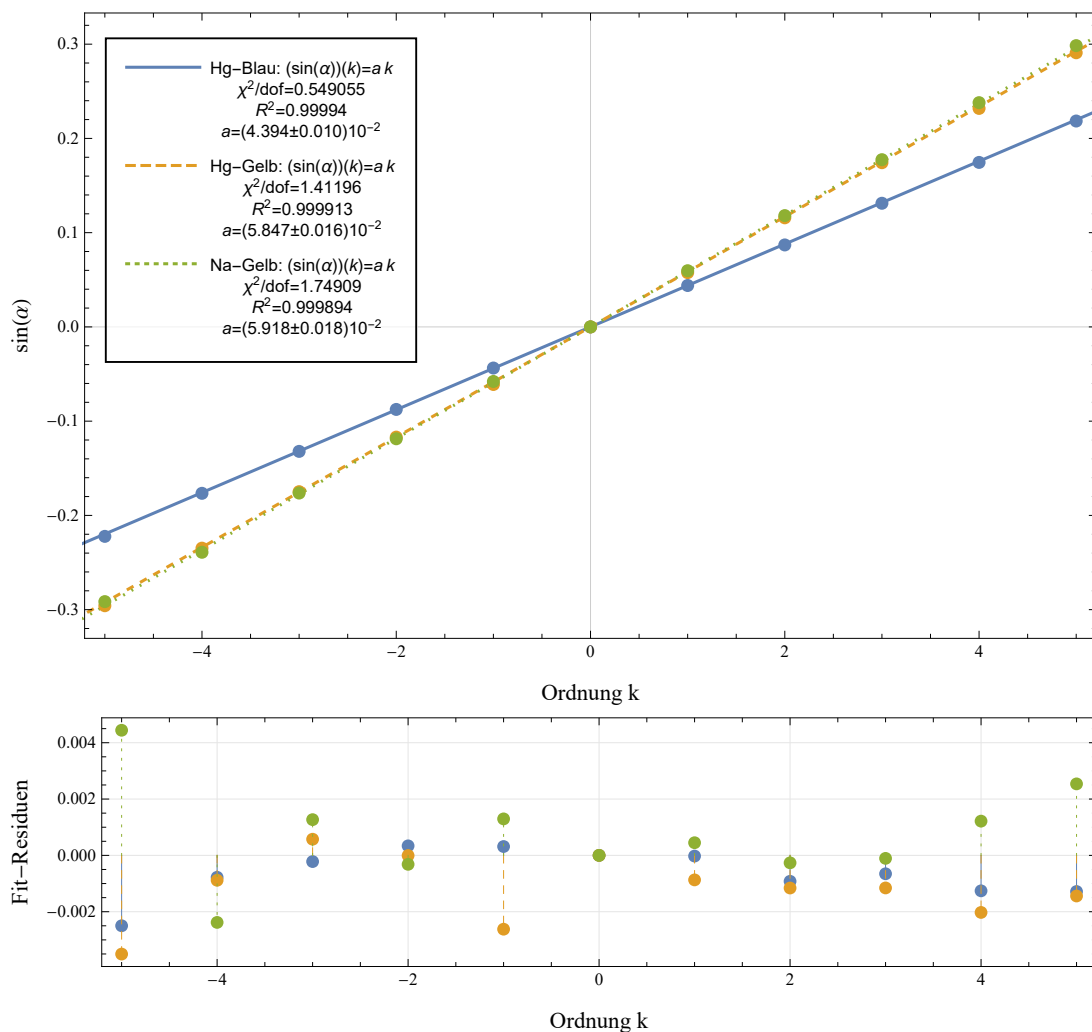


Abbildung 3: lineare Regression nach Gleichung 10

Mit dem Fitparameter lässt sich die Wellenlänge leicht ausrechnen

$$\lambda = a \cdot g \quad (16)$$

Es folgen sofort die drei Wellenlängen der Regressionsparameter

- Quecksilber, Blau:  $\lambda_{Hg,Blau} = (435.0 \pm 2.0)\text{nm}$
- Quecksilber, Gelb:  $\lambda_{Hg,Gelb} = (578.7 \pm 2.8)\text{nm}$
- Natrium, Gelb:  $\lambda_{Hg,Blau} = (585.8 \pm 3.0)\text{nm}$

## 4 Fehler-/Ergebniseinschätzung

Alle gemessenen Winkel wurden mit der Unsicherheit von einer Bogenminute verarbeitet. Bei Einsetzen in Gleichungen wurde stets die Gaußsche Fehlerfortpflanzung benutzt. Der brechende Winkel  $\gamma = (60.433 \pm 0.011)^\circ$  entspricht nicht den angegebenen Winkel von  $60^\circ$ . Allerdings schränkt das kaum die Genauigkeit der Ergebnisse ein, da die Unsicherheit kleiner ist als eine Bogenminute und wenn es sich um einen systematischen Fehler handelt, wäre dieser auch in den Folgemessungen vorhanden und würde sich so relativieren, da er gerichtet wäre. Der Ausreißer in der Regression zur Sellmeier Gleichung lässt sich auf der Messung einer falschen Spektrallinie zurückführen. Das basiert zum Teil auch auf der oft sehr wagen Angabe der Farben. Der  $\chi^2$ -Test zeigt zu groß abgeschätzte Unsicherheiten, welches sich beim Weiterrechnen mit den Parametern aber nicht negativ auszuwirken scheint. Trotzdem dürfen die Ergebnisse der Regression nur als Näherung beziehungsweise Interpolation/Extrapolation gesehen werden und liefern keinesfalls exakte Werte. Innerhalb des bestimmten Intervalls aber sollte die Näherung gut genug innerhalb der Fehlergrenzen sein.

Beim Vergleich der Auflösungsvermögen fällt schnell auf, dass das Gitter in der zweiten Ordnung bereits eine bessere Auflösung liefert als das Prisma. Das wird aber durch erheblich geringere Intensität, vor allem für steigende Ordnungen, in Kauf genommen. Interessant scheint die Diskrepanz zwischen theoretischen Auflösungsvermögen der Natriumduplett-Linien und den tatsächlich beobachteten Vermögen. Theoretisch reicht ein Auflösungsvermögen von  $> 983$  bei angegebener ausgeleuchteter Breite. Es ist also der Wert von 15mm für die Ausleuchtungsbreite stark anzuzweifeln. Tatsächlich deckt sich das mit der Beobachtung das der Strahl die Seite des Gitters lediglich schwach und mit wenig Fläche durchschreitet ganz im Gegensatz zu den inneren Bereich. Man kann die tatsächlich effektive Spaltbreite abschätzen mit der folgenden Relation (wenn man großzügig annimmt, dass der Strahl ein Radius von der Hälfte der Spaltbreite annimmt)

$$15\text{mm} - 15\text{mm} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot ((15\text{mm})^2 - \pi \cdot (7.5\text{mm})^2)}{15\text{mm} \cdot 7.5\text{mm}} \approx 11.8\text{mm} \quad (17)$$

Tatsächlich aber wird der Strahl dünner als die angenommenen 7.5mm Strahlradius sein. Realistisch sind 6mm Strahlradius aus denen effektiv 5.7mm aktive Gitterbreite entstehen. Damit fällt das Auflösungsvermögen in die zweite Ordnung. Desweiteren ist mit der Unzulänglichkeit des menschlichen Auges der Experimentatoren zu rechnen. Es kann gut sein, dass die Linien sehr wohl aufgelöst waren, nur nicht in menschlich wahrnehmbarer Breite. Alle diese Probleme wären mit einer fein auflösenden Photodiode behoben, die über einen Winkelbereich gefahren werden kann und die Lichtintensität proportional zum Strom aufnimmt.



## 5 Anlagen

## 5.1 Messwerte

Platz 1  
Prisma 1

Strahlengang Winkel: ~~73,5°~~  $73,5^{\circ} 9'$  ± 1'

$\gamma_{\text{links}} = 122,5^{\circ} 16'$   
 $\gamma_{\text{rechts}} = 7,5^{\circ} 24'$

A1)

violett:	$\delta_{\text{min},v} = 22,0^{\circ} 25'$	;	$\delta_{\text{min},l} = 124,5^{\circ} 23'$
blau:	$\delta_{\text{min},v} = 23,0^{\circ} 16'$	;	$\delta_{\text{min},l} = 124,0^{\circ} 4'$
blau/grün:	$\delta_{\text{min},v} = 24,0^{\circ} 19'$	;	$\delta_{\text{min},l} = 123,0^{\circ} 0'$
grün/gelb:	$\delta_{\text{min},v} = 25,0^{\circ} 4'$	;	$\delta_{\text{min},l} = 122,0^{\circ} 16'$
rot:	$\delta_{\text{min},v} = 25,0^{\circ} 27'$	;	$\delta_{\text{min},l} = 122,0^{\circ} 0'$

A2)

0. Ordnung:	$73,5^{\circ} 10'$	
1.	$70,5^{\circ} 0'$	-1.: $76,5^{\circ} 16'$
2.	$67,0^{\circ} 19'$	-2.: <del>79,5°</del> $79,5^{\circ} 22'$
3.	$64,0^{\circ} 18'$	-3.: $83,0^{\circ} 4'$
4.	$60,5^{\circ} 22'$	-4.: $86,0^{\circ} 11'$
5.	$57,5^{\circ} 5'$	-5.: $89,0^{\circ} 20'$

---

A3)

0. Ordnung:	$73,5^{\circ} 8'$	0. Ordnung	$73,5^{\circ} 7'$
Blau:		"Gelb" oder Orange	
	-n.te	n.te	-n.te
1	$76,0^{\circ} 9'$	$71,0^{\circ} 8'$	$76,5^{\circ} 25'$
2	$78,5^{\circ} 7'$	$68,5^{\circ} 7'$	$80,0^{\circ} 15'$
3	$81,0^{\circ} 9'$	$66,0^{\circ} 4'$	$83,5^{\circ} 6'$
4	$83,5^{\circ} 8'$	$63,5^{\circ} 1'$	$86,5^{\circ} 24'$
5	$86,0^{\circ} 9'$	$60,5^{\circ} 24'$	$90,0^{\circ} 17'$

Abbildung 4: Messdatenprotokoll: Seite 1

NA-Lampe

A2)  $\delta_{\min, e} = 121,5^\circ 20' \quad | \quad \delta_{\min, r} = 25,0^\circ 25'$

A3) 0. Ordnung: ~~73,5~~  $73,5^\circ 7'$

n	n-te	-nte
1	<del>70,0</del> $70,0^\circ 18'$	$77,0^\circ 2'$
2	$66,5^\circ 19'$	$80,0^\circ 23'$
3	$63,5^\circ 1'$	$83,5^\circ 17'$
4	$59,5^\circ 25'$	$87,0^\circ 15'$
5	$56,5^\circ 25'$	$90,5^\circ 13'$

A6) 4. Ordnung: erste Anzeichen  
 5. Ordnung: erste erkennbare Trennung  
 Beleuchtete Breite: 75mm, keine Unsicherheit

09.05.16  
 S. Schäfer

Abbildung 5: Messdatenprotokoll: Seite 2

## 6 Literaturverzeichnis

- [1] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Elektrodynamik und Optik*, 2010
- [2] Dr. Uwe Müller: *Physikalisches Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*, 2007  
 (mit Korrekturen Einführungsscript 2007 von P. Schäfer, 2016)